انتگرال[۵]
بخش ۵

[۵] Sh. Nosrati, 13961208 update 14000504 ES0.

روشی دیگر برای حل انتگرال کسکانت

$$
\begin{aligned}
I_{۲۶} &= \int \csc x \, \mathrm{dx} \\
&= \int \frac{\sin x}{۱ - \cos^{۲} x} \, \mathrm{dx} \\
&= \int \frac{-۱}{۱ - u^{۲}} \, \mathrm{du} \quad ; \quad \cos x = u \implies -\sin x \, \mathrm{dx} = \mathrm{du} \\
&= -\frac{۱}{۲} \ln \frac{۱ + u}{۱ - u} + C \\
&= -\frac{۱}{۲} \ln \cot^{۲} \frac{x}{۲} + C \\
&= \ln \left(\tan \frac{x}{۲} \right) + C
\end{aligned}
$$

انتگرال توابع نمائی

$$\begin{aligned} I_{۲۷} &= \int ۲^x + ۲^{-x}\,\mathrm{dx} \\ &= \int ۲^x + \left(\frac{۱}{۲}\right)^x\,\mathrm{dx} \\ &= \frac{۲^x}{\ln ۲} + \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}{\ln\frac{۱}{۲}} + C \\ &= \frac{۲\sinh(x\ln ۲)}{\ln ۲} + C \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{۲۸} &= \int x^{۴} + ۵x^{۳} - ۴x \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{۱}{۵}x^{۵} + \frac{۵}{۴}x^{۴} - ۲x^{۲} + C \\
I_{۲۹} &= \int \frac{۱}{x^{۵}} - ۶x^{۲} + ۴x^{۳} + \frac{۲}{x} \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{-۱}{۴x^{۴}} - ۲x^{۳} + x^{۴} + ۲\ln x + C \\
I_{۳۰} &= \int \frac{x^{۷} - ۸x^{۳} + ۴x^{۲} + ۵}{x^{۳}} \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{-۵}{۲x^{۲}} - ۸x + \frac{۱}{۵}x^{۵} + ۴\ln x + C \\
I_{۳۱} &= \int x(x^{۲} + x^{۳} - ۸) \, \mathrm{dx} \\
&= \frac{۱}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۵}x^{۵} - ۴x^{۲} + C
\end{aligned}
$$

$$I_{۳۲} = \int \frac{۱}{\sqrt{۴ - x^{۲}}} \, \mathrm{dx}$$
$$= \arcsin \frac{x}{۲} + C$$
$$I_{۳۳} = \int ۴\sqrt[۳]{x} - ۵^{x} + \frac{۳}{x^{۳}} \, \mathrm{dx}$$
$$= \frac{-۳}{۲x^{۲}} - \frac{۵^{x}}{\ln ۵} + \frac{۹}{۴}x^{\frac{۴}{۳}} + C$$
$$I_{۳۴} = \int (x^{۲} + ۵)(۳x^{۳} - ۴) \, \mathrm{dx}$$
$$= \frac{-۴}{۳}x^{۳} + \frac{۱۵}{۴}x^{۴} + \frac{۱}{۲}x^{۶} - ۲۰x + C$$
$$I_{۳۵} = \int \frac{۱}{x^{۲} - x - ۱۲} \, \mathrm{dx}$$
$$= \frac{۱}{۷} \ln \frac{۴ - x}{۳ + x} + C$$

$$
\begin{aligned}
I_{۳۶} &= \int \frac{x^{۵} + ۷x^{۲} - ۶}{x^{۳}}\,\mathrm{dx} \\
&= \int x^{۲} + \frac{۷}{x} - ۶x^{-۳}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{x^{۳}}{۳} + ۷\ln|x| + \frac{۳}{x^{۲}} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۳۷} &= \int \frac{۲x^{۴} - ۵x^{۳} + ۷x - ۱}{x - ۲}\,\mathrm{dx} \\
&= \int ۲x^{۳} - x^{۲} - ۲x + ۳ + \frac{۵}{x - ۲}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{۱}{۲}x^{۴} - \frac{۱}{۳}x^{۳} - x^{۲} + ۳x + ۵\ln|x - ۲| + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۳۸} &= \int \frac{۲x - ۱۲}{x^{۳} - ۵x^{۲} + ۶x}\,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{-۲}{x} + \frac{۴}{x - ۲} + \frac{-۲}{x - ۳}\,\mathrm{dx} \\
&= -۲\ln|x| + ۴\ln|x - ۲| - ۲\ln|x - ۳| + C \\
&= ۲\ln\frac{(x - ۲)^{۲}}{x(x - ۳)} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۳۹} &= \int \frac{۴x}{(۲x^{۲}-۳)^{۲۳}}\,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{۱}{u^{۲۳}}\,\mathrm{du} \\
&= \int u^{-۲۳}\,\mathrm{du} \\
&= \frac{u^{-۲۲}}{-۲۲}+C \\
&= -\frac{۱}{۲۲u^{۲۲}}+C \\
&= -\frac{۱}{۲۲(۲x^{۲}-۳)^{۲۲}}+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۴۰} &= \int \frac{(\sqrt[۳]{x}+۲)^{۴}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\,\mathrm{dx} \\
&= \int ۳u^{۴}\,\mathrm{du} \quad ; \quad \sqrt[۳]{x}+۲=u \implies \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}\,\mathrm{dx} = \mathrm{du} \\
&= \frac{۳}{۵}u^{۵}+C \\
&= \frac{۳}{۵}(\sqrt[۳]{x}+۲)^{۵}+C
\end{aligned}
$$